PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé le 24 Mai 2012

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

PROBLEME : (11,5 POINTS)

N.B. : Les trois parties sont indépendantes.

Partie A

On donne la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ et (C_f)est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2cm)

1) Etude des variations de f et représentation graphique de la courbe de f.

1) a) Calculer les limites de f en 0 et en$+\infty$ **0,75pt**

1) b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation **1,25pt**

1)c) Construire la courbe de f **1,00pt**

2) On désigne par a un nombre réel strictement positif ; puis on pose $I(a) = \int_a^1 f(x)dx$

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_a^1 \ln x dx$ **0,50pt**

2) b) En déduire de la question précédente la valeur de $I(a)$ **0,50pt**

2) c) Calculer la limite de $I(a)$ lorsque a tend vers 0^+ **0,50pt**

Partie B

Pour tout n entier naturel, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n t dt$.

1) Calculer I_0 et I_1. **0,50pt**

2) a) Montrer en utilisant une intégration par parties que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n + 2).I_{n+2} = (n + 1).I_n$. **1,00pt**

2) b) En déduire pour $p \in \mathbb{N}$, un expression simple de I_{2p} en fonction de p. **1,00pt**

3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et à termes positifs et, en utilisant la double inégalité $I_{n+2} < I_{n+1} < I_n$, déterminer la limite de $\frac{I_n}{I_{n+1}}$. **1,00pt**

4) a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n + 1).I_{n+1}.I_n = \frac{\pi}{2}$. **0,50pt**

4) b) Déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$. **0,50pt**

Partie C

1) Déterminer tous les couples d'entiers naturels (x, y) tels que $x^3 - y^3 = 999$ **1,00pt**

2) On donne a et b deux entiers naturels. On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système d'équations :

$$\begin{cases} x \equiv a \ [9] \\ x \equiv b \ [11] \end{cases}$$

2) a) Démontrer que toutes les solutions de ce système sont congrues à un même nombre modulo 99 **1,00pt**

2) b) Trouver les solutions de ce système pour le cas particulier $a = 3$ et $b = 7$ **0,50pt**

<u>EXERCICE 2 (5 POINTS) :</u>

1) a) La suite $(r_n)_{n>0}$ est une suite géométrique réelle de premier terme r_1 ($r_1 > 0$) et de raison $q = \frac{2}{3}$.

Exprimer r_n en fonction de r_1 et n. **0,50pt**

1) b) La suite $(\theta_n)_{n>0}$ est une suite arithmétique réelle de premier terme θ_1 ($\theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$) et de raison $r = \frac{2\pi}{3}$. Exprimer θ_n en fonction de θ_1 et n. **0,50pt**

1) c) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $z_n = r_n e^{i\theta n}$. Sachant que z_1, z_2 et z_3 sont liés par la relation $z_1.z_2.z_3 = 8$, calculer le module et un argument de chacun des complexes z_1, z_2 et z_3. **1,00pt**

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 4cm) on considère le point M_n d'affixes z_n.

2) a) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4. **0,50pt**

2) b) Pour tout n entier naturel non nul, calculer en fonction de n, la distance M_nM_{n+1} **0,50pt**

2) c) Exprimer la somme $Ln = \sum_{k=1}^{k=n} M_n M_{n+1}$ en fonction de n puis calculer la limite de Ln quand n tend vers $+\infty$. **1,00pt**

3) a) Déterminer une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM_n})$ en fonction de n. **0,50pt**

3) b) Pour quelles valeurs de n les points O, M_1 et M_n sont-ils alignés ? **0,50pt**

EXERCICE 1 (3,5 POINTS) :

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé d'un plan P. Soit f l'application du plan dans le plan qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M'de coordonnés (x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

1) Donner la nature et les caractéristiques géométriques de l'application f. **1.00pt**

2) Soit (H) la conique d'équation cartésienne $xy = 1$ et (H') l'image de (H) par l'application f.

2) a) Déterminer l'équation cartésienne de (H') **1.00pt**

2) b) Donner la nature de (H'), puis dans un repère $(\omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ convenablement choisi, donner les caractéristiques de (H') (on donnera les foyers, les sommets l'excentricité, les directrices et les asymptotes) puis construire (H') **1.50pt**

Fin de l'épreuve