PREPA VOGT ORA ET LABORA

INGÉNIEUR

**B.P : 765 Yaoundé**
**Tél : 33 24 67 75 / 76 29 16 45**
**Mail : ingénieur@prepavogt.org**
**Sites : www.ingénieur.prepavogt.org**
**www.prepavogt.org**

ESIGELEC — EPF École d'ingénieurs — 3iL école d'ingénieurs — ESMT École Supérieure Multinationale des Télécommunications — IUC Institut Universitaire de la Côte

Yaoundé, le 21 juillet 2014

**CONCOURS D'ADMISSION**
**SERIE C**

**EPREUVE DE MATHEMATIQUES**
**DUREE : 3 HEURES**

## EXERCICE 1 (3,5 POINTS) :

On considère un entier naturel $n \geq 5$ et les entiers naturels a et b déterminés par :

$$a = n^3 - n^2 - 12n \quad \text{et} \quad b = 2n^2 - 7n - 4$$

1) Montrer que le nombre $n - 4$ est un diviseur de a et de b. **0,50pt**

2) On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$ puis on note $d = \text{PGCD}(\alpha, \beta)$.

2) a) Etablir une relation entre $\alpha$ et $\beta$ indépendante de n. **0,25pt**

2) b) Démontrer que d est un diviseur de 5. **0,25pt**

2) c) Démontrer que les nombres $\alpha$ et $\beta$ sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est un multiple de 5. **0,75pt**

2) d) Montrer que n et 2n+1 sont premiers entre eux. **0,25pt**

2) e) Déterminer $\text{PGCD}(a, b)$ suivant les valeurs de n et en fonction de n. **1,00pt**

2) f) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$. **0,50pt**

**EXERCICE 2 (6,5 POINTS) :**

1) Dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, on considère le triangle équilatéral ABC tel que :

$$AB = AC = BC = a, \text{ a étant un nombre réel strictement positif.}$$

1) a) Déterminer le point G, barycentre des points A, B et C respectivement affecté des coefficients 2, 1 et 1. **0,50pt**

1) b) Préciser sur une figure la position du point G. **0,50pt**

1) c) On considère l'ensemble $\mathbb{A}$ des points M de $\mathcal{E}$ vérifiant la relation :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$$

1) c) i) Montrer que A est un élément de $\mathbb{A}$. **0,50pt**

1) c) ii) Déterminer l'ensemble $\mathbb{A}$. **1,00pt**

2) Soit E un plan vectoriel de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère l'endomorphisme $f$ de E dont la matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est :

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On donne l'ensemble $E_\lambda = \{\vec{u} \in E, \text{ tels que } f(\overrightarrow{u}) = \lambda\vec{u})\}$ où λ est un nombre réel.

On admettra que $E_\lambda$ est un sous espace vectoriel de E.

2) a) Montrer que f est un automorphisme. **0,50pt**

2) b) Démontrer que si $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 3$ alors $E_\lambda = \{0_E\}$ **0,50pt**

2) c) Déterminer $E_{-1}$ et $E_3$.

Préciser un vecteur de base $\vec{e}_1$ de $E_{-1}$ et un vecteur de base $\vec{e}_2$ de $E_3$. **1,00pt**

2) d) Démontrer que la famille B'=$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de E. **0,50pt**

2) e) Démontrer que $E_{-1}$ et $E_3$ sont supplémentaires dans E. **1,00pt**

2) f) En déduire la matrice de f dans la base B'=$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ **0,50pt**

**PROBLEME (10 POINTS) :**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ou l'unité sur les axes est le centimètre.

1) On considère la fonction $f$ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1)$$

(C) est la courbe représentative de $f$ dans le repère précédent.

1) a) Calculer la limite de $f$ en 0 et en $+\infty$. **0,50pt**

1) b) Etudier la variation de $f$ et dresser le tableau de variation. **1,00pt**

1) c) Construire la courbe de $f$. **1,00pt**

1) d) Déterminer les coordonnées des points A et B de (C) d'abscisses respectives $x = 3$ et $x = \frac{5}{4}$. **0,50pt**

1) e) Déterminer les coordonnées des points P et H, projetés orthogonaux respectifs de B sur les axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$. **0,50pt**

2) R est une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z'.

2) a) Trouver une relation entre z' et z ; puis l'expression analytique de R. **0,50pt**

2) b) Déterminer les coordonnées des points A', B' et P' images respectives des points A, B et P par la rotation R. **0,75pt**

3) On donne la fonction $g$ définie par $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

3) a) Montrer que lorsqu'un point M appartient à (C) alors son image M' appartient à (Γ). **1,00pt**

3) b) Construire sur le graphique précédent les points A', B' et P', et la courbe (Γ).
(on n'étudiera pas la variation de g). **1,25pt**

3) c) Calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 2} g(x).\,dx$ et donner une interprétation graphique. **1,00pt**

3) d) Déterminer, en unité d'aires, l'aire A du domaine du plan limité par les côtés $[OA]$, $[OH]$, $[HB]$ et l'arc de la courbe de (C) d'extrémités A et B. **0,50pt**

3) e) Trouver une relation entre l'intégrale $I = \int_{\frac{5}{4}}^{3} f(x).\,dx$ et l'aire A. **1,00pt**

3) f) En déduire la valeur exacte de I. **0,50pt**

Fin de l'épreuve