PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.com

Yaoundé le 23 Mai 2009

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE D, E, F, GCEA/L

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1/ 5pts

Une urne contient : 3 boules marquées du numéro 100, 5 marquées du numéro 150 et 4 boules marquées du numéro 200.
On tire simultanément 3 boules de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.
1. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - a- « Tirer trois boules portant trois numéros différents » **0,75pt**
   - b- « Obtenir trois boules portant le même numéro » **0,75pt**
   - c- « Tirer au moins une boule marquée du numéro 200 » **0,75pt**

2. Il faut payer 547 F pour effectuer un tirage de trois boules. Et chaque tirage rapporte en francs la somme des points marqués.
   - a- Déterminer la probabilité d'être gagnant. **1,00pt**

3. On effectue cinq tirages successifs de trois boules en remettant les trois boules dans l'urne après chaque tirage.
Calculer la probabilité d'être gagnant.
   - a- Exactement trois fois **0,75pt**
   - b- Au moins une fois **1,00pt**

EXERCICE 2/ 5pts

On se propose de démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ est convergente et de calculer sa limite.

1) On pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et $I_1 = \int_1^e x \ln x \, dx$. Calculer I_0 et I_1. **1,25pt**
2) En utilisant une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2I_n + nI_{n-1} = e^2$, puis calculer I_2. **1,00pt**
3) a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geq 0$. **0,50pt**
   b- Montrer que la suite (I_n) est décroissante. Conclure. **0,75pt**
4) a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$ **0,50pt**
   b- En déduire. $\lim_{n\to+\infty}(I_n)$ et $\lim_{n\to+\infty}(n.I_n)$ **1,00pt**

EXERCICE 3/ 4pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On note A le point d'affixe $Z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, B le point de coordonnées (0, 2),

M le point d'affixe $Z = x + iy$ et M' le point d'affixe $Z' = x' + iy'$.

1) Soit S la similitude directe plane de centre O qui transforme A en B. En supposant S(M) = M', exprimer Z' en fonction de Z et déduire le rapport et l'angle de S. **1,00pt**

2) On définit le suite (Z_n) des nombres complexes par : $Z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$Z_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})Z_n$.

On note M_n le point d'affixe Z_n, $r_n = |Z_n|$ et $\theta_n = \arg(Z_n)$. On a alors $Z_n = [r_n\ ; \theta_n]$.

a) Ecrire le complexe $1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique. **0,50pt**

b) Montrer que la suite (r_n) des modules de Z_n est une suite géométrique et la suite (θ_n) des arguments de Z_n est une suite arithmétique que l'on caractérisera. **1,50pt**

c) En déduire r_n, θ_n puis Z_n en fonction de n. **1,00pt**

EXERCICE 4/ 6pts

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{4}{(1 - x^2)^2}$.

1) Déterminer les réels a, b, c et d tels que $\forall x \in D_f$,

$f(x) = \frac{a}{1 - x} + \frac{b}{1 + x} + \frac{c}{(1 - x)^2} + \frac{d}{(1 + x)^2}$. **1,00pt**

2) Déterminer la primitive F de f sur $]-1; 1[$ qui s'annule en 0. **1,00pt**

3) Soit la fonction numérique g définie par $g(x) = \frac{2x}{1 - x^2} + \ln(\frac{1 + x}{1 - x})$.

On note Cg la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer l'ensemble de définition Dg de g. **0,50pt**

b) Montrer que g est impaire. Qu'en déduire pour Cg ? **0,50pt**

c) Etudier les variations de g sur $[0, 1[$ et dresser le tableau de variation de g sur Dg. **1,25pt**

d) Tracer la courbe Cg de g et sa tangente en 0. **1,00pt**

e) Calculer l'aire du domaine plan délimité par (Cg), et les droites d'équations y=0, x=0, et x=1/2 **0,75pt**

Fin de l'épreuve