INGÉNIEUR
B.P : 765 Yaoundé
Tél : 33 24 67 75 / 76 29 16 45
Mail : ingénieur@prepavogt.org
Sites : www.ingénieur.prepavogt.org
www.prepavogt.org

Yaoundé, le 21 juillet 2014

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE D, E, F, GCE/AL

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 : (6 POINTS)

1) On considère le polynôme complexe P défini par :

$$P(z) = (2 + i).z^3 - (2 + 11.i).z^2 - (18 - 11.i).z + 18 - i$$

1) a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une unique racine réelle z_0 que l'on déterminera. **1,00pt**

1) b) Résoudre, dans l'ensemble C des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$. **1,00pt**

On désignera par z_1 et z_2 les racines complexes de cette équation avec partie réelle de z_2 négative.

1) c) Peut-on écrire les complexes z_1 et z_2 sous forme trigonométrique ? Justifier. **1,00pt**

2) On considère les points A_0, A_1 et A_2 ayant respectivement pour affixes z_0, z_1 et z_2.

Soit S la similitude plane directe dont le centre est A_1 et qui transforme A_0 en A_2.

2) a) Déterminer l'expression complexe de S. **1,00pt**

2) b) Préciser l'angle et le rapport de cette similitude. **1,00pt**

3) Déterminer l'affixe du point G, barycentre du système des points pondérés suivants : **1,00pt**

$$\{(A_0, 1) ; (A_1, -4) ; (A_2, -1)\}$$

PROBLEME (9 POINTS) :

On donne la fonction f définie par $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$ où ln est le logarithme népérien.
(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité sur les axes est de 2 cm.

1) Etablir que l'ensemble de définition de f est $D_f =]0, +\infty[$. **0,50pt**

2) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition. **0,50pt**

3) Etudier la variation de f et dresser son tableau de variation. **1,00pt**

4) a) Montrer que f réalise une bijection de D_f vers un ensemble B qu'on précisera. **0,50pt**

4) b) Déterminer la fonction réciproque $f^{-1}(x)$. **1,00pt**

5) a) Montrer que pour tout $x \in D_f$, on a : $f(x) = x + \ln(1 - e^{-2x})$. **0,50pt**

5) b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f. **0,50pt**

5) c) Déterminer la position relative de la droite (D) par rapport à la courbe (C_f). **0,50pt**

6) a) En utilisant la question 4) montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α ; puis vérifier que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$. **1,00pt**

6) b) Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$; l'équation $X^2 - X - 1 = 0$. **0,50pt**

6) c) En déduire de la question 6) b) une valeur exacte de α. **0,50pt**

7) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse α. **0,50pt**

8) Construire les courbes (C_f) et sa réciproque $(C_{f^{-1}})$ puis les droites (D) et (T). **1,50pt**

EXERCICE 2 (5 POINTS) :

1) Soient a et b des nombres réels et (u_n) une suite numérique telle que pour $p \in \mathbb{N}^*$ on ait :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{p-1} = p.(a.p + b)$$

1) a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique. **0,75pt**

1) b) Calculer le premier terme et la raison de cette suite. **1,00pt**

1) c) Calculer les termes u_{10} et u_{20} pour $a = \frac{3}{2}$ et $b = \frac{-5}{2}$. **1,00pt**

2) On considère deux entiers naturels p et q et la fonction F définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par :

$$F(x) = \ln\ (1 + x) + \frac{1}{2}.\ln\ (1 + x^2) + \frac{1}{3}.\ln (1 + x^3)$$

2) a) Démontrer que : **0,75pt**

$$F\left(\frac{p}{q}\right) = \ln\ (p + q) + \frac{1}{2}.\ln\ (p^2 + q^2) + \frac{1}{3}.\ln\ (p^3 + q^3) - 3.\ln (q)$$

2) b) En déduire de la question précédente la valeur approchée de $F\left(\frac{3}{4}\right)$ à 10^{-2} près. **0,50pt**

2) c) Calculer la dérivée de la fonction F. **0,50pt**

2) d) Calculer la valeur de l'intégrale : **0,50pt**

$$I = \int_0^{\frac{3}{4}} (\frac{1}{1 + x} + \frac{x}{1 + x^2} + \frac{x^2}{1 + x^3})dx$$

Fin de l'épreuve