partenaire de

Créateurs d'avenirs

ESSCA (Management-Finance)

CONCOURS BLANC **RAISONNEMENT LOGIQUE ET MATHEMATIQUE**
SESSION DU 28 MARS 2015 **DUREE : 3H**

L'épreuve se décompose en 3 parties de 8 questions chacune. Chaque question se compose de 4 propositions pour lesquelles le candidat doit indiquer si elles sont vraies ou fausses. Toutes les réponses sont possibles. Par exemple, dans une même question, les propositions peuvent être toutes vraies, ou toutes fausses

Première Partie : **Raisonnement Logique**
Le candidat mettra en œuvre des outils simples adaptés à la résolution des exercices proposés. Il devra faire preuve d'adaptation rapide d'une question à l'autre, les questions étant indépendantes.

Deuxième Partie : **Raisonnement Mathématique**
Dans cette partie plus classique, le candidat devra démontrer sa maîtrise des outils faisant partie du programme de mathématiques des filières générales du baccalauréat. Les questions y sont également indépendantes.

Troisième Partie : **Problème mathématique**
Dans cette partie, les questions peuvent être dépendantes. Le candidat pourra donc exploiter les résultats obtenus précédemment pour répondre aux questions suivantes.

Chaque question comporte quatre items **A, B, C, D**. Pour chaque item, le candidat devra signaler s'il est vrai en indiquant sur la grille de réponses en marquant la case sous lettre **V** ; ou faux en l'indiquant sur la grille de réponses en marquant la case sous la lettre **F.**

Important : ***L'utilisation d'une calculatrice est strictement interdite.***

PARTIE A : RAISONNEMENT LOGIQUE (Exercices 1 à 8).

Exercice 1.

Le directeur d'une colonie de vacances possède un lot de billes. Il constate qu'il peut distribuer ces billes en parts égales, aux 54 enfants de la colonie. Avant d'avoir fait la distribution, il reçoit 24 enfants de plus. Il constate alors qu'il peut toujours distribuer en parts égales, le lot initial de billes à tous les enfants.

A : Le plus petit nombre de billes que doit comporter le lot initial est 216 billes et chaque enfant a exactement 7 billes.
B : Le plus petit nombre de billes que doit comporter le lot initial est 312 billes.
C : La part de chaque enfant lors de la distribution sachant que le lot initial est le double de la valeur minimal du lot initial est 18.
D : La part de chaque enfant lors de la distribution sachant que le lot initial est le triple de la valeur minimal du lot initial est 27.

Exercice 2

Trois lignes d'autobus ont pour point de départ la gare de la poste centrale de Yaoundé. Les autobus de la première ligne qui parcourent le trajet poste centrale- Emana sont de retour au bout de 1h 36 min et restent 4 min à l'arrêt. Les autobus de la deuxième ligne qui parcourent le trajet poste centrale-Mendong sont de retour au bout de 1h 48 min et restent 12 min à l'arrêt, ceux de la troisième ligne qui parcourent le trajet Poste centrale-Soa sont de retour au bout de 2h 10 min et restent 20 min à l'arrêt.
Trois autobus, un pour chaque ligne partent ensemble de la poste centrale à 08 h.

A : Les trois autobus repartiront ensemble pour la première fois à la gare de la poste centrale à 18h précise.
B : Les trois autobus repartiront ensemble pour la première fois de la gare de la poste centrale après 20h.
C : L'autobus de la ligne de SOA et celui de la ligne d'Emana repartiront pour la première fois à 13 heures et ayant accomplis respectivement 2 et 3 tours.
D : Lors de la première rencontre l'autobus de la ligne d'Emana aura accompli 7 trajets, celui de Mendong 5 trajets et celui de SOA 4 trajets.

Exercice 3
Dans une ville, il y a trois centres de secours d'urgence. Cinq malades appellent le même jour un centre au téléphone, après avoir choisi au hasard l'un des centres sur minitel.

A : L'ensemble fondamental Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des 3-arrangements d'un ensemble ayant 5 éléments.
B : La probabilité p_1 pour que les malades appellent le même centre est $p_1 = \frac{1}{20}$.
C : La probabilité p_2 pour que les trois centres soient appelés est $p_2 = \frac{20}{27}$.
D : La probabilité p_3 pour que exactement deux centres soient appelés est $p_3 = \frac{17}{60}$.

Exercice 4
On admet que dans une famille, les sexes des enfants consécutifs sont indépendants et que chaque enfant a la probabilité $\frac{1}{2}$ d'être garçon ou fille.

A : Une famille a deux enfants dont l'un au moins est un garçon. La probabilité pour que les enfants soient des garçons est $\frac{1}{3}$.
B : Une famille a deux enfants, l'aine est un garçon. La probabilité pour que la famille ait deux garçons est $\frac{1}{2}$.
C : La probabilité pour que dans une famille de six enfants il y ait au moins trois garçons est donnée par $\frac{21}{32}$.
D : La probabilité pour que dans une famille de six enfants, il y ait au moins trois garçons est donnée par $\frac{7}{16}$.

Exercice 5
Un lot de dix pièces doit être commercialisé. La probabilité qu'une pièce présente un défaut est égale à $\frac{1}{10}$ (indépendamment des autres). Les dix pièces sont examinées par deux techniciens de manière indépendante. Lorsqu'il y a un défaut, chacun des techniciens reconnait dans 80% des cas. La commercialisation du lot est refusée si l'une au moins des 10 pièces est reconnue défectueuse.

A : La probabilité que la commercialisation du lot soit refusée est $1 - (0{,}904)^{10}$.
B : La probabilité que la commercialisation du lot soit autorisée bien qu'il y ait au moins une pièce défectueuse est nulle.
C : L'événement la commercialisation du lot est autorisée est un événement impossible.
D : La probabilité pour que la commercialisation du lot soit autorisée bien qu'il y ait au moins une pièce défectueuse est $(0{,}904)^{10} - (0{,}89)^{10}$.

Exercice 6

On désigne par $a, b\ et\ c$ trois réels strictement positifs tels que

$$abc > 1 \quad \text{et} \quad a+b+c < \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

A : Aucun des réels $a, b\ et\ c$ ne peut être égal à 1.

B : L'un au moins des réels $a, b\ et\ c$ est strictement supérieur à 1.

C : L'un au moins de réels $a, b\ et\ c$ est strictement inférieur à 1.

D : Les trois nombres sont strictement supérieurs à 1.

Exercice 7

Pour honorer les efforts des élèves et les records des sportifs, le foyer socio-éducatif d'un lycée propose l'achat de coupes, de médailles et de trophées pour une somme comprise entre 3000 F et 35 000 F. Il semble nécessaire d'acheter un minimum de 30 coupes, 30 médailles et 10 trophées. Un catalogue présente deux sortes de lots.

- Le lot (I) est composé de 3 coupes, 6 médailles et 5 trophées et coûte 560 F.
- Le lot (II) est composé de 18 coupes, 6 médailles et coûte 1120 F.

Soit x le nombre de lots de (I) et y le nombre de lots de (II) achetés par le foyer socio-éducatif.

A : Le couple (x, y) vérifie $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 3x + 18y \geq 30 \\ x + y \geq 5 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$.

B : Le couple (x, y) vérifie $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x + 6y \geq 10 \\ x - y \geq 5 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$

C : Le couple (x, y) vérifie $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x + 6y \geq 5 \\ x + y \geq 5 \\ x - 2 \geq 0 \\ 560x + 1120y\ minimal \end{cases}$

D : Le couple (x, y) vérifie $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x + 6y \geq 10 \\ x - y \geq 5 \\ 560x + 1120y\ minimal \end{cases}$

Exercice 8

Mme Julienne est une voyante extraordinaire mais un peu désordonnée. Ainsi elle a prédit à un turfiste le résultat du prochain tiercé 5, 7, 13 parmi 18 chevaux numéroté de 1 à 18. Mais elle est incapable lui préciser l'ordre d'arrivée. Le turfiste a joué un seul ticket à 6000 F avec les trois numéros dans un ordre au hasard. Le tiercé dans l'ordre a rapporté 4.524.000 F, dans le désordre 904.800 F. On note par X la variable aléatoire indiquant la somme gagnée par le turfiste.

A : Le nombre de tous les ordres d'arriver possibles est 4896.
B : Le nombre d'arrivée possibles est 6.
C : La consultation chez la voyante a couté 1.400.000 F. Le jeu est rentable.
D : Le jeu est équitable.

PARTIE B : RAISONNEMENT MATHEMATIQUE (Exercice 9 à 16).

Exercice 9

Dans le plan complexe (P) rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points $A\ et\ B$ d'affixes respectives $z_A = 3 + i\ \ et\ \ z_B = 1 + 2i$.

A : Une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est $\frac{\pi}{3}$.
B : Le triangle *ABC* est isocèle et une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est $\frac{\pi}{4}$.
C : Soit θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. L'ensemble des nombres complexes solution de l'équation $z^2 \cos^2\theta - 2z \sin\theta\ \cos\theta + 1 = 0$ est $z_1 = \tan\theta + i$, $z_2 = \tan\theta - i$.

D : Toutes les intégrales de l'équation différentielle $(1 + \cos 2\theta)y'' - (2 \sin 2\theta)y' + 2y = 0$ sont de la forme $y = (A \cos x + B \sin x)e^{x \tan\theta}$ où A, B sont des réels.

Exercice 10

On considère la fonction φ définie sur $[0,1]$ par: $\varphi(x) = \sin(\pi x)$.

A : Le nombre $I = \int_0^1 \sin(\pi x)dx$ est égale à $\frac{4}{\pi}$.
B : Le nombre complexe $1 + e^{i\frac{\pi}{n}} + e^{i\frac{2\pi}{n}} + \cdots + e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}$ vaut $\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$.
C : La somme de réels $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$ est égale à $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
D : Pour tout $n > 1$, on pose : $S_n = \frac{1}{n}\left(\varphi(0) + \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \varphi\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$. La suite (S_n) converge vers I.

Exercice 11

Soient m et p deux réels tels que $p \leq 0$. On considère dans $\boldsymbol{R}$ l'équation

$$(*):\quad x^2 - (m+1)x + m + p = 0$$

A : Si l'équation (*) a une unique solution alors $p = 0$.

B : On désigne par $\alpha\ et\ \beta$ les solutions distinctes de l'équation (*) lorsqu'elles existent $(\beta > \alpha)$. On a les égalités $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{m^2-2p+1}{m+p}$ et $\beta^3 + \alpha^3 = (m+1)^3 - 3(m+p)$.

C : Si $2m^2 + p = 1$ et $\alpha^2 + \beta^2 = 4$ alors $\alpha = -\sqrt{2}\ et\ \beta = \sqrt{2}$.

D : Si $2m^2 + p = 1$ et $\alpha^2 + \beta^2 = 4$ alors $\alpha = 0\ et\ \beta = 2$.

Exercice 12

On considère la fonction g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = \tan x$. On admet que g est une bijection $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\boldsymbol{R}$, et on désigne par φ la bijection réciproque de g définie sur $\boldsymbol{R}$.

A : La fonction φ est une fonction impaire et $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$.
B : On a les égalités suivantes : $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = \frac{\pi}{4}$, $\varphi(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$.
C : Lorsque x tend vers $+\infty$, le nombre $\varphi(x)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$.
D : La fonction φ est dérivable sur $\boldsymbol{R}$ et pour tout $x \in \boldsymbol{R}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 13

Soit a un réel tel que $0 < a < 1$. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout entier *n*, $u_{n+2} = au_n + (1-a)u_n$.

A : La suite (u_n) est croissante.
B : Pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n < u_{n+2} < u_{n+1}\ \ ou\ \ u_{n+1} < u_{n+2} < u_n$.
C : La suite (v_n) définie pour tout *n>0*, par $v_n = u_n - u_{n-1}$ est une suite géométrique convergente.
D : La suite (u_n) est une suite convergente.

Exercice 14

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives : $z_A = -2i,\ z_B = 4 - 2i,\ z_C = 4 + 2i,\ z_D = 1$

A : Le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.

B : On désigne par F l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{z-(4+2i)}{z+2i}$. L'ensemble E des points $M(z)$ tel que $|z'| = 1$ est un cercle du plan.

C : Pour tout $z \neq -2i$, on a l'égalité $(z' - 1)(z + 2i) = -4 - 4i$.

D : Pour tout point M distinct de A, on pose $M' = F(M)$. On a, $M \neq D$; $DM' \cdot AM = 4\sqrt{2}$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{DM'}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{5\pi}{4}$.

Exercice 15

Soit n un entier naturel non nul et I_n définie par : $I_n = \int_0^1 (1 + x^n) \ln(1 + x) dx$.

A : Pour tout $x \in [0,1]$, on a : $0 \leq \ln(1 + x) \leq \ln 2$.

B : Pour tout $n > 0$, on a : $0 \leq I_n \leq 2 \ln 2$.

C : La suite (I_n) est décroissante.

D : La suite (I_n) converge vers zéro.

Exercice 16.

Soit (P) une parabole représentative de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ qui passe par les points $A(2,4)$, $B(-2,-2)$. On désigne par (T) la tangente à (P) au point A qui coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -6.

A : Une équation cartésienne de la tangente est : $x - 2y + 6 = 0$.

B : La valeur de $f'(2) = \frac{1}{2}$.

C : Le triplet (a, b, c) vérifie le système $\begin{cases} 4x + 2y + z = 4 \\ 4x - 2y + z = -2 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$

D : Pour tout $x \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{f(x) = 0{,}25x^2 + 1{,}5x + 2.}$

PARTIE C : PROBLEME MATHEMATIQUE (Exercices 17 à 24).

Soit n un entier naturel non nul. On désigne par f_n la fonction de la variable x définie dans l'intervalle $]0,+\infty[$ par: $f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln x$.

Exercice 17

A : L'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution α_n telle que $1 \leq \alpha_n \leq e^2$.
B : $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$ et la suite (α_n) est croissante.
C : La suite (α_n) est convergente et converge vers 2.
D : La suite (α_n) est convergente et converge vers e^2.

Exercice 18

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par: $g(x) = \frac{2x-\ln x}{2\sqrt{x}}$ et la fonction h définie par : $h(x) = \sqrt{x}$. On désigne par (C) et (C') les courbes représentatives des fonctions $g\ et\ h$ respectivement dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan. (unité sur les axes 2cm).

A : Pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{f_1(x)}{2x\sqrt{x}}$.
B : (C') est asymptote de (C) à $+\infty$ et (C) est au-dessus de (C').
C : Les courbes (C) et (C') ont une tangente commune au point d'abscisse 1.
D : Les courbes (C) et (C') ont une tangente commune au point d'abscisse e^2.

Exercice 19

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} g\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

et on pose $I = \int_1^2 g(x)dx$.

A : L'aire de la partie du plan délimitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations $x = 1\ et\ x = 2$ est $\sqrt{2}\ln 2 - 2\sqrt{2} + 2\ cm^2$.
B : Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k < n$. On a les inégalités

$$\frac{1}{n}g\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} g(x)dx \leq \frac{1}{n}g\left(1+\frac{k+1}{n}\right).$$

C : Pour tout entier $n > 0$, $u_n - \frac{g(2)}{n} \leq I \leq u_n - \frac{g(1)}{n}$.
D : La suite (u_n) est convergente et converge vers $I - \sqrt{2}$.

On considère la fonction g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = \tan x$. On désigne par φ la bijection réciproque de g définie sur R.

Exercice 20

A : La fonction h définie par : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$ est continue.

B : Les fonctions $f_0\ et\ f_1$ définie sur $[0;+\infty[$ par : $f_0 : x \mapsto x - \frac{x^3}{3} - \varphi(x)$ et $f_1 : x \mapsto x - \varphi(x)$ ont même monotonie.

C : Pour tout $x \geq 0$, $0 \leq x - \varphi(x) \leq \frac{x^3}{3}$.

D : La fonction h est dérivable en zéro et $h'(0) = 1$.

Exercice 21

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}dt & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

A : La fonction f est une fonction paire.

B : Pour tout $x > 0$, $1 - f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \left(\frac{t-\varphi(t)}{t}\right)dt$.

C : La fonction f est dérivable à droite de zéro et pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{x}\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}dt \leq \frac{\pi}{\sqrt{x}}$.

D : La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est 1.

Exercice 22

On se propose d'étudier la fonction f.

A : Pour tout $x > 0$, $x^2 f'(x) = -\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}dt + \varphi(x)$.

B : On pose $u(x) = x^2 f'(x)$, pour $x \geq 0$, on a : $xu'(x) = -\varphi(x) + \frac{x}{1+x^2}$.

C : Pour tout $x \geq 0$, $f'(x) > 0$.

D : La fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

On considère la fonction h définie par: $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. On pose :

$$f(x) = \exp\left(\frac{h(x)}{x}\right)\ si\ x \neq 0, et\ f(0) = e$$

Exercice 23

A : La fonction h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

B : La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout x.

C : Pour tout $x \geq 1$, $h(x) - h(1) \leq \frac{x-1}{\sqrt{2}}$, et pour $x \in [0,1]$, $h(x) \leq \frac{x}{\sqrt{2}}$.

D : On a les inégalites $1 - \frac{x^2}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$, pour tout $x \geq 0$.

Exercice 24

A : On a les inégalités $x-\frac{x^3}{6}\leq h(x)\leq x$, pour $x\geq 0$.
B : La fonction f est paire et continue en zéro.
C : La fonction f est dérivable en zéro avec $f'(0)=0$ et pour tout $x\neq 0$,
$f'(x)=\frac{1}{x^2}f(x)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)$.
D : On note par (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. La droite d'équation $y=1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.